

Übungsblatt 0

Aufgabe H1 Codezahlen.

Ein Computer generiert rein zufällig eine 6-stellige Codezahl, die aus den Ziffern 1,2,3,...,9 besteht (z.B. 159212). Geben Sie einen geeigneten diskreten Wahrscheinlichkeitsraum an und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse:

- a) $A := \{\text{“Alle Ziffern sind verschieden”}\}$
- b) $B := \{\text{“Aufeinanderfolgende Ziffern sind verschieden”}\}$
- c) $C := \{\text{“Die Ziffer 1 kommt höchstens 2 Mal vor”}\}$
- d) $D = \{\text{“Die Ziffernsumme beträgt genau 13”}\}$ (Tipp: Man kann z.B. das Codewort 231124 mit Ziffersumme 13 mit $(1+1) + (1+1+1) + (1) + (1) + (1+1) + (1+1+1+1)$ identifizieren.)

Lösung: Alle möglichen Codezahlen $\Omega = \{1, \dots, 9\}^6$ sind gleich wahrscheinlich. Man beachte, dass $|\Omega| = 9^6$ ist. (Sei $\mathcal{A} := \mathcal{P}(A)$ und $\mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{9^6}$. Dann ist $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum.)

a)

Es ist $|A| = 9 \cdot 8 \cdot \dots \cdot 4 = 60480$. Damit erhalten wir

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{60480}{9^6} = \frac{2240}{19683} \approx 0.114 \quad (1P.)$$

b)

Wenn aufeinanderfolgende Ziffern verschieden sein sollen, haben wir für die erste Ziffer 9 Möglichkeiten. Für die anderen Ziffern haben wir jeweils 8 Möglichkeiten (alle Ziffern außer der vorangegangenen Ziffer). Damit ist $|B| = 9 \cdot 8^5$ und somit

$$\mathbb{P}(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{9 \cdot 8^5}{9^6} = \frac{32768}{59049} \approx 0.555 \quad (1P.)$$

c)

Bezeichne mit C_i das Ereignis, dass die Ziffer 1 genau i -mal vorkommt. Für die Position der i Einsen gibt es genau $\binom{6}{i}$ Möglichkeiten. Da an den anderen Stellen des Codewortes nur Ziffern ungleich 1 stehen, gibt es für jede Stelle 8 Möglichkeiten und insgesamt 8^{6-i} Möglichkeiten Ziffern für die Stellen auszuwählen, wo keine Einsen stehen. Daher ist $|C_i| = \binom{6}{i} \cdot 8^{6-i}$ und damit $|C| = |C_0| + |C_1| + |C_2|$

$$\text{Also } \mathbb{P}(C) = \frac{|C|}{|\Omega|} = \frac{\binom{6}{0} \cdot 8^{6-0} + \binom{6}{1} \cdot 8^{6-1} + \binom{6}{2} \cdot 8^{6-2}}{9^6} = \frac{520192}{531441} \approx 0.979 \quad (2P.)$$

d) Wie im Tipp erwähnt können wir die Zahl 13 als eine Summe aus lauter Einsen darstellen, die in 6 nicht leeren Blöcken aus Einsen zerlegt wird. Jede solch eine Darstellung entspricht genau einer Codezahl (man beachte, dass man auf diese Weise keinen Block bekommt der größer ist, als 9). Der erste Block startet vor der ersten Eins und der letzte Block nach der letzten 1. Daher müssen wir noch die übrigen 5 Stellen festlegen, wo ein Block beginnt bzw. endet. Daher müssen wir aus den 12 möglichen Positionen 5 auswählen. Damit ist $|D| = \binom{12}{5} = 792$. Also

$$\mathbb{P}(D) = \frac{|D|}{|\Omega|} = \frac{792}{9^6} = \frac{88}{59049} \approx 0.00149 \quad (2P.)$$

Aufgabe H2 *Wetterprognose.*

Laut Wetterbericht beträgt die Wahrscheinlichkeit,

- dass es morgen regnet, 30 %,
- dass es übermorgen regnet, 40 %,
- dass es sowohl morgen als auch übermorgen regnet, 20 %.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit regnet es

- a) an mindestens einem der beiden Tage?
- b) an genau einem der beiden Tage?
- c) an keinem der beiden Tage?
- d) morgen nicht, aber übermorgen?

Lösung: Wir bezeichnen mit A das Ereignis, dass es morgen regnet und B das Ereignis, dass es übermorgen regnet. Damit haben wir $\mathbb{P}(A) = 0.3$, $\mathbb{P}(B) = 0.4$ und $\mathbb{P}(A \cap B) = 0.2$. (1 Punkt)

a)

Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(A \cup B)$. Nach der Siebformel ist

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = 0.3 + 0.4 - 0.2 = 0.5$$

(1 Punkt)

b)

$(A \cup B) \setminus (A \cap B)$ ist das Ereignis, dass es an mindestens einem, aber nicht an beiden Tagen regnet, also an genau einem der beiden Tage. Aus $A \cap B \subset A \cup B$ folgt

$$\mathbb{P}((A \cup B) \setminus (A \cap B)) = \mathbb{P}(A \cup B) - \mathbb{P}(A \cap B) = 0.5 - 0.2 = 0.3$$

(1 Punkt)

c)

Das Ereignis, dass es an beiden Tagen nicht regnet ist genau das Gegenereignis dazu, dass es an mindestens einem Tag regnet. Damit folgt mit (a)

$$\mathbb{P}((A \cup B)^c) = 1 - \mathbb{P}(A \cup B) = 1 - 0.5 = 0.5$$

(1.5 Punkte)

d)

$B \setminus (A \cap B)$ ist das Ereignis, dass es übermorgen regnet, aber nicht an beiden Tagen, d.h. nicht morgen. Wieder folgt wegen $A \cap B \subset A$:

$$\mathbb{P}(B \setminus (A \cap B)) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = 0.4 - 0.2 = 0.2$$

(1.5 Punkte)

Aufgabe H3 *Zufällige Teilbarkeit.*

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Zahl $x \in \{1, \dots, 100\}$ durch 2 oder 5 teilbar ist? Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist x weder durch 4 noch 8 noch 10 teilbar?

Lösung: *Erstellt von Meier-Hans 11.09.2014*

Wir wählen $\Omega = \{1, \dots, 100\} \Rightarrow |\Omega| = 100$. A_i sei das Ereignis, dass die gewählte Zahl durch i teilbar ist.

Durch zählen erhält man $|A_2| = 50 \Rightarrow \mathbb{P}(A_2) = \frac{1}{2}$, $|A_5| = 20 \Rightarrow \mathbb{P}(A_5) = \frac{1}{5}$ und $|A_{10}| = 10 \Rightarrow \mathbb{P}(A_{10}) = \frac{1}{10}$.

Gesucht ist $\mathbb{P}(A_2 \cup A_5)$. Somit folgt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_2 \cup A_5) &= \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_5) - \mathbb{P}(A_2 \cap A_5) \\ &= \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_5) - \mathbb{P}(A_{10}) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} = \frac{3}{5}.\end{aligned}$$

Gesucht ist $\mathbb{P}(A_4^c \cap A_8^c \cap A_{10}^c)$. Ebenso erhält man unter Berücksichtigung von $A_8 \subset A_4$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_4^c \cap A_8^c \cap A_{10}^c) &= 1 - \mathbb{P}(A_4 \cup A_8 \cup A_{10}) \\ &= 1 - \mathbb{P}(A_4 \cup A_{10}) \\ &= 1 - [\mathbb{P}(A_4) + \mathbb{P}(A_{10}) - \mathbb{P}(A_4 \cap A_{10})] \\ &= 1 - [\mathbb{P}(A_4) + \mathbb{P}(A_{10}) - \mathbb{P}(A_{20})] \\ &= 1 - \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{10} - \frac{1}{20} \right] = \frac{7}{10}.\end{aligned}$$

Viel Erfolg! :)